Subiectul III — Exercițiul 2

Matematica — M1_Mate-Info

Toate aparițiile acestui exercițiu din toate modelele de examen din categoria de mai sus.

102 exerciții · din 102 sesiuni (2012–2026)

1. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n dx$.
5p	**a)** Calculați I_2.
5p	**b)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
5p	**c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\geq 2$.

2. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx$ şi $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

3. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p = \int_0^1 x^p e^{x^2} dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $2I_p + (p-1)I_{p-2} = e$, pentru orice $p \geq 3$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1^2}{n^2}} + 2e^{\frac{2^2}{n^2}} + \ldots + ne^{\frac{n^2}{n^2}} \right)$.

4. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt}{x}$.

5. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ şi se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.

6. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_1 = e^2$.

5p **c)** Demonstraţi că $I_{n+1} + (n+1) I_n = 2^{n+1} e^2 - e$, pentru orice număr natural n.

7. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n = \frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

8. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} + (n+1) I_n = e$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $1 \leq (n+1) I_n \leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

9. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n = n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

10. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) I_n = \frac{1}{2}$.

11. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+x+1\right) f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x)-x+1\right)dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

12. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

13. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx=\ln 3$.

14. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

15. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)+x^2 f(x)}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{8}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

16. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)+2x\right)dx=e-1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=e-3$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}\left(3e^2-19\right)$.

17. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.

5p **b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\frac{1}{2015}$.

18. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)\,dx = e(e-1)$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

19. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $\left(2n+3\right)I_{n+1} = 2\left(n+1\right)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

20. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
5p	**a)** Calculaţi $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.
5p	**b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$.
5p	**c)** Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

21. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_5^{10}(x-4)f(x)\,dx=\ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)\,dx\right)=1$.

22. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

5p **b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

23. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

5p **b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu e.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{1}\left(f(x)+e^{x}\right)dx=0$.

24. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)dx$.
5p	**b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

25. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

---

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

26. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$.

27. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătați că $\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=9$.

5p **b)** Pentru $n=1$, arătați că $\int_{0}^{1}f(x)e^x dx=2e-1$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

28. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu n^2-n+1.

29. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{e-1}{e}$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$. Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

30. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

31. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

32. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^4 f^n(x)dx$. Demonstraţi că $I_{n+1} \leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

33. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

34. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\dfrac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\dfrac{1}{e}$.

35. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

36. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=e$ și $x=a$ are aria egală cu $2a$.

37. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

38. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

5p	**b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{e^{-1}}^{1}x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

39. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=-\frac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\displaystyle\int_1^2 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

40. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{31}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

41. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$.

42. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2-\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^x(x+1)^n\left(f(x)\right)^n dx$.

Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

43. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_{-3}^{3} \lvert x f(x) \rvert dx$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

44. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1} |x f(x)| dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x} t \cdot f(t) dt}{x^2}$.

45. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\displaystyle\int_e^a \ln x\,dx=2a$.

46. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=2\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

47. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

48. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx = 2(e-3)^2$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

49. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\ln x\,dx=\frac{e^2-7}{4}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, $a>1$ pentru care $\int_1^a f(x)e^x dx=e^a-3e$.

50. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx = 0$.

51. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right) dx = \frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_1^e f(x)\,dx + \int_1^e e^x \ln x\,dx = e^e$.

52. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_{-4}^{1} f(x)dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, f(\sin x)dx = 6-2\sqrt{5}$.

53. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_{-1}^{1} \lvert x f(x) \rvert dx$.
5p	**c)** Arătați că $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{0}^{x} f(t) dt = 2$.

54. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(-x)dx$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a și b, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)$ este o primitivă a funcției f.

55. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 \left(f(x)-x^2\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.

56. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

---

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\le\frac{\pi}{8}$.

5p **c)** Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculați $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx$.

57. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.

58. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

5p	**b)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
5p	**c)** Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$.

59. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)\,dx=27$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=2$.

60. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\frac{\pi}{8}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\displaystyle\int_0^a x f(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.

61. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

---

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

62. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

63. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

64. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

5p **c)** Arătați că, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, pentru orice primitivă F a funcției f.

65. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Speciala Subiect V07 · V07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

5p	**b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$.

66. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{-1}^1 \left\lvert x\ln\left(f(x)\right)\right\rvert dx = 2\ln 2 - 1$.

67. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

---

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+4\right) f(x)\,dx = 0$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \geq 0$, pentru orice număr real x.

68. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \ln\left(f\left(x\right)\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că există un singur număr real x, $x \in [0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt = 2021$.

69. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x\left|f(x)\right|dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

70. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^{e} x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.

71. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

72. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x^2 \left(f(x)\right)^3 dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \ln\left(f(t)\right) dt = +\infty$.

73. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)\,dx=7$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Știind că $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2(x+1)\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+4$ este o primitivă a funcției f, arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)F(x)\,dx=32$.

74. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

---

2. Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\frac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\frac{5}{8}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=4(1-\ln 3)$.

5p **c)** Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\displaystyle\int_a^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}dx=\sqrt{3}-1$.

75. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

5p **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = 0$.

76. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 1$.

5p **b)** Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n.

77. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x}dx = 20$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx = 0$.

78. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\frac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\displaystyle\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

79. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.
5p	**c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

80. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

5p **b)** Demonstrați că $F(\sqrt{7})<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

81. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

82. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

---

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\displaystyle\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

83. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)\,dx = \frac{19}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}\,dx$. Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.

84. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

85. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

86. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\le\frac{\pi}{2}$.

87. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_1^4 xf(x)dx = 4\ln 2$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)$.

88. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

5p **b)** Arătați că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-6x}{x+1}dx = \frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(x^2\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $a\pi+\ln 2$.

89. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx = \frac{e-2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt\right) = 1$.

90. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3 f(x)\left(x^2+1\right)^2\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx$. Arătați că $I_n-I_{n+4}=\dfrac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n.

91. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

---

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f\left(x^n\right)}\,dx$. Demonstrați că $\dfrac{\ln 2}{n}\leq I_n\leq\dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

92. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

---

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-x\ln x\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \left(f(x)-x-1\right)dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)-x\ln x\right)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

93. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1}dx=\frac{\ln 6}{2}$.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x\left(f(2t)-f(t)\right)dt\right)=6$.

94. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3}\ln 2$.
5p	**c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ este egală cu $\frac{3e^2+5}{4}$.

95. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 \left(f(x)-e^x\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\ln(e+1)$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$.

96. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 5 - \frac{6}{e}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$. Arătați că $I_{n+1} + 4I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

97. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 5 - \frac{6}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$. Arătați că $I_{n+1} + 4I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

98. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2+\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(f(x)-\sqrt{x^2+4}\right)dx=3$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)-x^2+2}dx=1$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x F(t)dt=0$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

99. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Rezerva Vara Iunie · V07

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Rezerva_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+\dfrac{1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+2}\right)dx=15$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e\frac{4\ln x}{f(x)-4x^3}dx=e^2+9$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(e^x\right)-4e^{3x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3e}{e+2}$.

100. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6+\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx=12+\ln 3$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\left(f(x)-6-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-6}{x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ este egală cu $m\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

101. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_1^3 f(x)\,dx = 0$.
5p	**c)** Determinați numărul real nenul m pentru care volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\left(1-\frac{\pi}{m}\right)$.

102. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

5p	**b)** Arătați că $\int_{e}^{e^2} \frac{f(x)}{x^2-4}dx = \ln 2$.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{F^2(x)} \int_{2}^{x} (t-2)F(t)\,dt = \frac{\ln 2}{4}$, unde $F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(2)=0$.